K	Y	K	Y	K	Y	K	Y
6	6	4	5	5	6	5	4
1	6	3	3	6	2	3	1
4	6	4	6	5	1	5	5
6	6	4	6	2	1	5	1
3	6	6	1	5	3	1	2
2	3	3	3	4	1	5	4
1	6	4	2	1	6	2	5
4	1	2	4	3	4	1	3
4	5	5	1	4	3	3	1
3	4	2	2	6	1	2	2
3	6	5	4	2	2	2	4
6	3	2	1	2	3	1	2
3	3	4	2	2	3	4	3
3	5	1	4	3	1	2	5
2	1	5	6	3	1	2	3
4	2	4	4	6	2	1	2
6	6	6	3	6	1	2	2
4	2	5	1	5	6	1	5
4	6	5	6	1	2	2	6
3	4	5	5	6	3	2	3
2	1	1	4	1	3	4	3
5	3	1	6	1	1	1	6
6	4	6	6	1	3	2	5
5	4	5	2	3	5	3	3
6	3	6	5	5	6	5	3

100 değer

K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M	K	S	M
9	6	9	0	5	3	1	6	5	8	7	8	4	3	2	7	7	4	8	6	4	8	9	2
5	8	7	3	5	4	3	4	3	3	9	9	9	3	5	3	7	8	9	0	9	1	3	0
5	0	7	7	7	8	0	0	3	7	1	8	0	6	9	3	8	8	6	9	0	5	9	3
3	1	4	5	3	1	5	5	1	0	5	7	6	4	8	7	8	4	8	8	6	6	1	9
4	3	9	5	0	5	0	6	3	3	7	8	8	8	9	0	2	8	8	2	0	3	9	7
8	8	7	6	4	6	3	7	1	1	1	3	3	8	1	8	7	3	7	2	2	5	5	0
5	4	2	1	7	7	6	2	8	9	8	9	3	7	7	7	5	1	0	5	0	0	3	7
0	1	0	1	0	3	3	3	2	2	1	8	3	1	4	7	0	9	0	6	6	9	9	0
4	6	2	5	3	4	7	4	8	5	6	2	0	2	0	3	3	9	6	2	9	1	2	6
9	8	6	1	4	0	8	4	6	3	9	2	7	7	6	7	6	2	9	1	6	7	1	2
5	2	4	2	4	8	1	5	9	8	1	1	1	9	7	7	5	8	5	0	1	2	9	1
3	5	6	6	2	2	8	7	5	6	9	3	8	4	7	0	0	7	9	8	7	8	9	9
6	4	4	8	0	9	7	8	1	0	4	0	9	5	2	4	1	9	5	2	6	6	6	8
5	4	8	1	6	6	2	1	9	3	1	0	7	3	0	7	2	8	2	1	7	8	3	9
4	5	3	7	5	1	0	7	3	0	6	3	8	9	4	5	2	8	2	1	3	6	4	0

360 değer

Pazartesi Grubu

İSTATİSTİK LAB DERS NOTLARI

Ölçme : Random sayı : Ölçme üzerindeki hata : Fizik nasıl üretilir?

Ölçme: İki kemiyet arasında yapılan karşılaştırmadır. Ölçme yapmaya başladığımda hatada yapmaya başlıyorum.

Bazı ölçmelerde çok doğru sonucu bulma ihtimalim yok ama bir sayının doğrusu yok. Bu durumlarda da ortalama değere bakıyorum.

Hatalar 2 türlü olabilir çok kötü hatalar ve çok kötü olmayanlar. Kötü hata = Sistematik hata

Örneğin ölçüm aletinin yapımından kaynaklanan hata. Ben bu hatayı ancak ve ancak tecrübeli isem düzeltebilirim.

Yanlış bir metre, kalibresi yanlış bir voltmetre.

2. tür hatalar keyfi (= random = istatistik) hatalardır.

Thermal dalgalanmalardan doğan hatalar keyfi hatalardır. Bunlar genelde doğadan kaynaklanır. Ama bu bir nokta üzerinde dalgalanma olduğundan çok ölçme yaparsam ortalama değeri alırım.

Bir ölçme tek başına bir işe yaramaz.

Ölçmek istediğim kemiyet $f(x)$ tek bir parametrenin fonksiyonu ise ben x'i ölçüyorum (f) üzerinden işlem yapıyorum. x'deki hatadan dolayı f'deki kemiyet ne kadar önemli bu önemlidir. Ben x'i ölçerken Δx kadar hata yapmışsam ve f'i seri açarsam

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(\Delta x)^2$$

(atabilirim)

$$f(x+\Delta x) = \underbrace{f(x)}_{\text{ölçmek istediğim kısım}} + \underbrace{\left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x}_{\Delta f} + O(\Delta x^2)$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} dx$$

$$\Delta f = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} \Delta x$$

Eğer benim bir f fonksiyonum var ve bu birden fazla fonksiyonu kullanıyorsa;

$$f(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x}, \underbrace{y_0+\Delta y}_{})$$

y_0: Bilmediğim ortalama değer
Δy: " hatası.

$$f(x,y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x,y)\Big|_{x_0 y_0} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y_0\\ x=x_0}} + O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Son terimin içinde neler var?

$$O(\Delta x^2 + \Delta y^2) = a\Delta x^2 + b\Delta y^2 + c\Delta x\Delta y + \ldots$$

($\Delta x \Delta y$: küçük bir sayıdır; + her zaman x_0 ve y_0 civarında salındığından toplamı daima sıfırdır.)

(Δx^2: Δy ile aynı; Δy^2: Δy küçükse Δy^2 çok daha küçüktür)

Bir silindirin hacmini ölçmek istiyorum. Yaptığım hata ne olacaktır.

$$V=\pi r^2 h$$

$$=\pi(r+\Delta r)^2(h+\Delta h)$$

$$=\pi(r^2+2r\Delta r+\Delta r^2)(h+\Delta h)$$

ihmal edilebilir

$$=\pi(r^2h+r^2\Delta h+2r\Delta r h+2r\Delta r\Delta h+\Delta r^2 h+\Delta r^2\Delta h)$$

V'nin kendisi — 2. derece ihmal.

$$V+\Delta V=\pi r^2 h+(\pi r^2\Delta h+2\pi r\Delta r h)$$

$$=V_0+\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h+\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r$$

Ortalama değer ve hata nedir? Nasıl hesaplanırlar.

Δx'i aldığım değerlerden hesaplama şansına sahibim.

Kemiyetlerin ortalama değer hesabı

Ortalama Değer Bulma:

Benim bir set deneyim olsun bunların ortalaması.

x_1

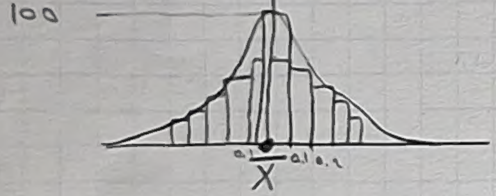
x_2

x_3

⋮

x_n

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N}$$ olur.



x ekseninde yaptığım ölçümlerin histogramı (bir aralığa ne kadar ölçüm gelmiş) ölçümlerim çok fazla ise bir çan eğrisi elde ederim ve bu eğrinin etrafında simetriktir.

$x_1=\bar{x}+\Delta x_1$

$x_2=\bar{x}+\Delta x_2$

$x_3=\bar{x}+\Delta x_3$

Çok ölçüm yaparsam Δx_2'nin + ve (−)'si gelecek ve ortalamam gerçek ortalamanın değerine yaklaşacaktır.

Aynı değerden $x_1=3$ $x_2=3$ $x_3=2$ $x_4=1$ $x_5=7$ .. $x_N=7$ $x_6=1$

$$\bar{x}=\frac{2\cdot3+1\cdot2+2\cdot1+2\times7}{2+1+2+2}$$

Ağırlıklı ortalama $\bar{x}=\dfrac{w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\dots+w_Nx_N}{w_1+w_2+w_3+\dots+w_N}$

2 insan ayrı ölçüm yapıyor ve ben bunlardan ortalama değer bulacağım. Eğer ikisini tanımıyorsam ikisini toplar bölerim. Yok eğer tanıyor ve birini titiz diğerini dağınık buluyorsam titizinkini %60 diğerini %40 ile çarparsam 100'e bölersen daha fazla tartarım

Şimdi yaptığımız ölçüm üzerindeki hatanın ne olduğunu bulacağız.

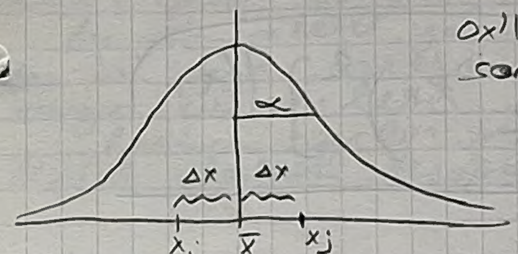
$x_1 = \bar{x} + \Delta x_1$

$x_2 = \bar{x} + \Delta x_2$ $\qquad \Delta x_i = \bar{x} - x_i$

$x_3 = \bar{x} + \Delta x_3$

$\overline{\Delta x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i$ buna Δx'lerin ortalamasını verir.

$x_4 = \bar{x} + \Delta x_4$



Δx'ler birbirlerini götürecek ve bir sonuç vermeyecektir.

$\overline{\Delta x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\Delta x|$ buna bir Δx tanımlayacaktır.

$\overline{\Delta x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|$ buna Δx'in ortalamalarını verir.

Yukarıdaki grafik $e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ ile tanımlanan fonksiyonun değerinin $-\frac{1}{2}$'ye düştüğü yer α'dır. Bu tanımdan gidersen ve $x = (\bar{x} - x_i)$ olarak alırsam α Δx ile ilişkili çıkar.

✓ Ben bir ölçüm yapıp Δx değeri verdiğim zaman her kez bir Δx değerini bulmalı. Yani ayrı deneydeki fark Δx mertebesinde olmalı. $\bar{x} \mp \Delta x$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overbrace{(x_i - \bar{x})}^{\Delta x}{}^2$$

σ niceliğinden çıkarak ben yeni bir hata tanımlarım. Bu çan eğrisinin yanıslığı ile ilgili bir nicelik. (standart sapma)

$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \Delta x$ olur. Buna da standart hata denir.

Bu tür bir hatanın ~~ortalaması~~ ölçümlerin Gauss'un dağılımından geldiğini biliyoruz.

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{1}{N}\sum_{i}(\bar{x} - x_i)^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{N}\sum_i(\bar{x}-x_i)^2 = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_i \bar{x}^2}_{\bar{x}\text{'in karesine eşit.}} - \frac{2}{N}\sum_i x_i\bar{x} + \frac{1}{N}\sum_i x_i^2$$

$$= \bar{x}^2 - \frac{2\bar{x}}{N}\sum_i x_i + \frac{1}{N}\sum_i x_i^2$$

$$= \bar{x}^2 - 2\bar{x}\underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_i x_i\right)} + \frac{1}{N}\sum_i (x_i)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_i x_i\right)^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\frac{1}{N}\sum_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_i x_i\right)^2\right]^{1/2}$$

Eğer ben her ölçümde yalnız ve yalnız x_i'leri ölçersem ya da 2. ihtimalle x_i ler ve x_i^2'leri kaydedersem 2. formülü kullanırım ilkinde birinci formülü kullanırım

V (Volt)
0.1
0.11
0.12
0.09
0.038
0.15
0.12
0.08

Bu sete bakarak voltajı bulun. $\bar{V}$'ne bakalım.

Ölçüm sayısı çok sınırlı.

$\bar{V}$'nü buluruz

$$\left[\frac{(\bar{V}-0.1)^2 + (\bar{V}-0.11)^2 + (\bar{V}-0.12)^2 + \dots}{N}\right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{8}}$$

bu bana ölçümlerimdeki hatayı veriyor

2. yöntem $\bar{V}$ ve V^2'leri bulup $\bar{V}^2$'lere bakıyorum

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\overline{V^2} - \bar{V}^2\right)^{1/2}$$ bana aynı sayıyı verecek.

Herhangi bir deneyde yaptığımız olayın keyfi sayımıdır? Keyfi sayı nedir?

Ben hiçbir şekilde keyfi sayıyı önceden bilemiyorum bu türden. İşlemin bir alternatifi var ise bir keyfi sayı olur.
Bunlar nerelerde görülür. Bu sayılar en çok kuantum mekaniğinde görülür. Yani mikro (atomik) seviyedeki olaylardır.

Bir uranyum atomunu aldığımızda ne zaman bozunacağını bilemem. Hangi anda hangisinin bozunacağını bilemem. Zamanlar (bozunmalar arası zamanlar) bilinemez keyfidir.
Bulutlu bir anda şimşek çakması olayı tamamıyla keyfidir.

Bütün olaylarımız random sayılardır. Cihazlar cihazlardır ve çevreden gelen gürültüler keyfi hatalar getirir.
Bu gürültüleri yok etmek için ortalamalar alınmalıdır. ...da bir deneyi simüle etmektir. Bunlar için bilgisayar kullanılır.
Random sayılar belli matematiksel formüllere göre ama ilişkisiz olarak hesaplanırlar.

Olasılık: Tamamıyla bağımsız olayların olabilme yüzdeleridir?
Bir parayı attığımızda $\frac{1}{2}$ ihtimalle bir yüzü diğer biri de $\frac{1}{2}$ ihtimalle gelir. Ancak bu bir etki yoksa böyledir. Ama biri parayı yönlendirirse bu gerçekleşmez.

İki olayın birbirine etkisi varsa neler olur? İki olayın birbirinden bağımsız olma durumundan farklıdır.

2 kere tura atma olasılığı nedir? $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olasılıkla

İki kere atışta tura getirebiliriz
→ olayların tekrarlanması durumundaki olasılık olayların çarpımına eşittir ←

Zar: 6 yüzü var. $\frac{1}{6}$ olasılıkla herhangi bir seçilen sayı çıkar.
2 kere aynı sayının gelmesi olasılığı $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
Rus ruletinde hayatta kalma ihtimali nedir?

Atma sayımızı arttırdığımız müddetçe yazı ve tura gelme olasılığı %50, %50 olacaktır.

N defa attıysam n_1 yazı, n_2 tura geldiyse

$P_{yazı} = \frac{n_1}{N}$ $\quad P_{tura} = \frac{n_2}{N}$ $\quad P_{yazı} + P_{tura} = 1$ olmalı.

2 zarla 7 sayısının gelme olasılığı nedir?

1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

$P = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) 6 = \frac{1}{6}$

Her durumda 6 durum var
her biri için $\frac{1}{6}$ olasılık var

2 zarla 3 sayısını nasıl olasılıkla elde ederiz?

1	2
2	1

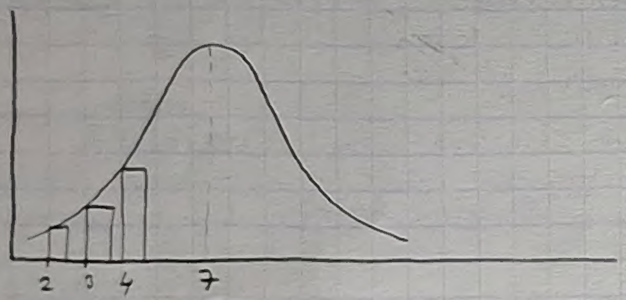
$2 \cdot \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

11 elde etmek için

5	6
6	5

$2 \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

12 için ise 6 6'dır $\frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ olur.



Bu tarzda çizimlere histogram diyoruz.

$2 \rightarrow P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} 1 = \frac{1}{36}$

$3 \rightarrow P = 2 \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

$4 \rightarrow$ 1 3, 2 2, 3 1 $\quad P = 3 \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$

$5 \rightarrow$ 1 4, 2 3, 3 2, 4 1 $\quad P = 4 \frac{1}{36} = \frac{4}{36}$

$6 \rightarrow$ 1 5, 2 4, 3 3, 4 2, 5 1 $\quad P = 5 \frac{1}{36}$

Örnek!
2 zarla bir tane para yuvarlıyoruz. Zar toplamı 7 ve para yazı gelecek olasılığı nedir?

Tamamıyle bağımsız olduklarından $\underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6}_{7\text{ sonucu için}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{para için}} = \frac{1}{12}$

!! Bir kere bağımsız olaylarla ilgileniyorsak olayların hepsinin aynı anda vuku bulma olasılığı bireysel olasılıkların çarpımına eşittir. !!

Bir torbada 6 tane siyah 4 tane beyaz tenis topu var. Eğer ben çektiğim topları geri atmazsam ardı ardına 1 siyah bir beyaz gelme olasılığım nedir.

siyah beyaz

$$\frac{6}{10}\ \frac{4}{9} = P_{siyah+Beyaz}$$

$$\frac{4}{10}\ \frac{6}{9} = P_{beyaz+siyah}$$

beyaz siyah.

$$P_{Siyah+siyah} = \frac{6}{10}\ \frac{5}{9}$$

Bir çekmecenin içine 30 tane 10'arlı gruplar halinde 3 renkte çorap konuyor. Arka arkaya aynı renkteki olasılığı çekme olasılığı nedir.

10 kırmızı, 10 Mavi, 10 Sarı

$$3\times\frac{10}{30}\ \frac{9}{29}$$

- Birden fazla benzer obje varsa bunları nasıl düzenleyeceğiz?

Bu kutuya 5 bilye koyalım. Kaç değişik kombinasyon elde edeceğiz. İlkini 5 kutudan herhangi birine koyabilirim. 2.'yi 4 adetten birine...

$$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$$

N! tane değişik kombinasyondan N parçayı tutma imkanına sahipsin. Permütasyon denir buna.

Tüm objeleri herhangi birinin yerine koyabilir farklı sekmede oluşur.

123
213
321
132
231
312

$N! = 3! = 6$

- Elimde N tane adam varsa ve ben bunlardan grup oluşturmak istiyorsam,

6 adam var 3 adamlık takım oluşturmak istiyorum. Kaç tane birbirinden farklı takım oluşturabilirim.

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

6 5 4

$$\frac{6!}{(6-3)!\,3!} \qquad \frac{N!}{(N-n)!\,n!} = \text{yaratılabilecek değişik grupların sayısı}$$

↳ gruba konulanların sayısı

↓ kendileri aralarında bir sıralama yapar.

$$C = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} = \binom{N}{n}$$

$$0! = 1$$

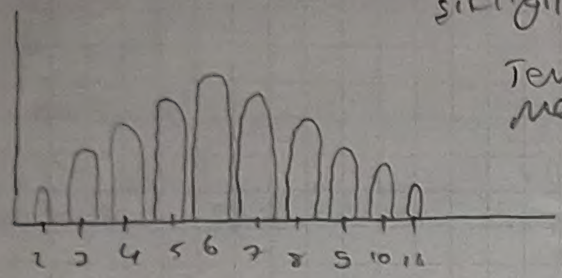
$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^{N-n} b^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} a^{N-n} b^n$$

Olasılık Dağılımı:

Dağılım olasılık durumları arasındaki dağılıklığı gösterimesidir.

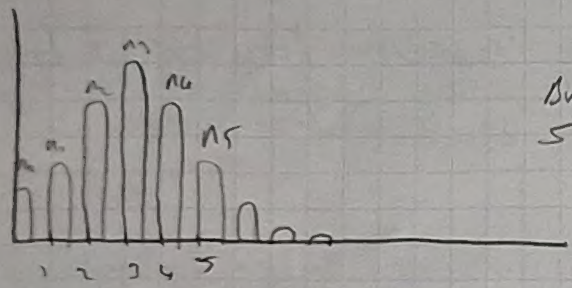
Temel 1-2 dağılım vardırki bilinmesi gerekir.

Dağılımlar yapılan işlemler açısından hep kayıtdırlar.



Elimizdeki dağılım ne olursa olsun altında kalan alanın bire gitmesi lazımdır.

e^- 'ların hızlarını ölçüyorum Hepsi (+) olsun. Kayrağın enerjiye ilgili bir pik var. En fazla e^- o tarafa çıkıyor.



Bunların dağılımların toplamı toplam sayıyı verir.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i \quad \text{idi}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_i w_i x_i$$

Bir dağılımın var ve kesikli ise hız ortalamasını almak için

$$\bar{v} = \frac{v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 + \dots + v_n n_n}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots}$$

$$f(n_i) = \frac{n_i}{N}$$

$$\bar{v} = \sum_i v_i f(n_i) = \frac{1}{N} \sum_i v_i N f(n_i)$$ Bir gösterim şekli

Her hangi bir kemiyet $\langle (x-\bar{x})^2 \rangle$ varyansı verir.

$$\langle (x-\bar{x})^2 \rangle = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 f(n_i) = \frac{1}{N} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 N f(n_i) = \sigma^2$$

Bir şemal.

Herhangi bir dağılım için varyans hesaplanabilir. Dağılımın geniş-uzar olduğunu olar.

Dağılım sürekli ise integrale dönüşür.

$$\frac{\int (x-\bar{x})^2 f(x)}{\int f(x)} = \langle (x-\bar{x})^2 \rangle$$

} Varyans formülü.

Sürekli dağılımlardan Gaussian, kesiklilerde ise binom dağılım en önemlilerden birisidir.

$$\sigma = \sqrt{\langle (x-\bar{x})^2 \rangle}$$

- Binom Dağılımı:

$$f_{N,p}(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$ ile tanımlanır.

p : bir şeyin olma olasılığı

$1-p$: olmama olasılığı.

Örn: 5 transistör alalım $\frac{1}{4}$'ü hatalı çıkmakta, o halde 5 tane transistörden 5 tanesinin hatasız çıkmasının olasılığı nedir.

$$f_{5,\frac{3}{4}}(5) = \binom{5}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{5!}{0!\,5!}\left(\frac{3}{4}\right)^5 1 = \frac{3^4}{4^5}$$

$N-n=5-5=0$

Transistör sayısı arttıkça payda çok daha hızlı büyüyor. 2 transistör alsaydık %56 olasılık vardı.

5 tanede 3'ünün çalışır olması olasılığı nedir?

$$f_{5,\frac{3}{4}}(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5!}{3!\,2!}\,\frac{3^3}{4^3}\,\frac{1}{4^2} = \frac{10\cdot 27}{64\cdot 16}$$

Elimde 5 zar var 3'ününde 3 gelme olasılığı nedir?

Her bir zarın 3 gelmesi olasılığı $p = \frac{1}{6}$

$$f_{N,p}(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^2$$

Bu dağılımdan ortalamalar nasıl hesaplanır?

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = N \cdot p$$

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{N} (n-\bar{n})^2 \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = N p (1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$$

Örnek) Hilesiz bir zar 7 kez atılıyor 5 veya 6 gelmesi isteniyor
a) 7 atışta 5 veya 6'nın 3 kez gelme olasılığı nedir
b) 5 ya da 6'nın hiç gelmeme olasılığı nedir?
c) 5 " " en az bir kez gelme olasılığı nedir?

a) $P_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$P = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \binom{7}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{560}{2187}$$

b) $P = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^7 = \frac{128}{2187}$

(olmama olasılığı)

c) cevap $\frac{2159}{2187}$ $\quad (1-q)^7$

Poisson Dağılımı!

$$f_{N,p}(n) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^n (1-p)^{N-n}$$ binom dağılımı idi.

Poisson bozunum mekaniğinde kullanılıyordu. N tane radyoaktif çekirdeğimiz olsun bunlardan birinin Δt süresi içinde bozulma olasılığı p olsun. Δt içinde n tane çekirdeğin bozulmasını bulmak istersek binomu kullanırız. Ama çok büyük sayılarla uğraşmak zorunda kalırız.

$N \sim 10^{23}$ bunlarla çok basit işlem

$P \sim 10^{-20}$ yapmamız mümkün değil-dir

$n \ll N$ idi.

$p \ll 1$ Bu yaklaşımlarda bir [illegible]

$N \to \infty$
$p \to 0 \qquad Np = a$

$$\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)\,\cancel{(N-n)!}}{\cancel{(N-n)!}}$$

N terim var.

$$= \overbrace{N(\cancel{N}-\cancel{1})(\cancel{N}-\cancel{2})\ldots(N-\cancel{n+1})}^{N \text{ terim var}}$$

ihmal. ihmal. ihmal.

$$= N^n$$

Bozunan radyoaktif çekirdek sayısının toplam sayıdan küçük olmasından giderek bu yaklaşımı yaptık.

$$F_{N,p}(n) = \frac{(Np)^n}{n!}(1-p)^{N-n} = \frac{(Np)^n}{n!}\frac{(1-p)^N}{(1-p)^n}$$

$(1-p)^n \sim 1 \qquad a = Np \qquad N = \frac{a}{p}$

$$F(n) = \frac{a^n}{n!}(1-p)^{a/p} = \frac{a^n}{n!}\left[(1-p)^{1/p}\right]^a$$

şimdi $p \to 0$ aldık, daha önce $N \to \infty$'u yaptık.

$$\lim_{u\to\infty}(1-p)^{1/p} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u}\right)^u} = \frac{1}{e}$$

$p = -u$ olsun.
$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$ idi

$$f_a(n) = \frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

Poisson Dağılım fonksiyonu:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = Np$$ in binom

$\bar{n} = a$ in Poisson

$\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \ldots, \Delta T_i$
$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i$ } $\bar{n} = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_a(n) = 1 \text{ olur} \qquad N \to \infty$$

n'in tüm olası değerleri toplamı bir (1)'e eşittir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_a(n) = e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} = 1$$

Poisson dağılımının standart sapması nedir?

$$\sigma = \sqrt{Np} = \sqrt{a} \qquad q \sim 1\text{'den}$$

Örnek! Bir fabrikadan üretilen ürünlerden %2'si bozuk çıkıyor. 100 üründen 3'ünün bozuk olma olasılığı nedir?

Aslında binomla bulabiliriz. Ama biz Poisson kullanalım.

$N = 0 \qquad N >> 1$

$p = 0.02 \qquad p << 1 \qquad Np = a = 2$

$$P_a(n) = \frac{e^{-a} a^n}{n!} = \frac{e^{-2} 2^3}{3!} = 0.180$$

Bunu binomla bulsaydık ne çıkardı? 0.182 fark yaklaşımdan kaynaklı.

Örnek! Bir kişinin bir hedefi vurma olasılığı 1/4'tür.

a) Bu kişi hedefe 7 atış yaparsa hedefi en az 2 kez vurma olasılığı nedir?

b) Hedefi en az bir kez vurma olasılığının 2/3'den büyük olması için bu kişinin kaç kez atış yapması gerekir?

Hiç vurmama olasılığı $P = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{2187}{16384}$

$P(\text{bir kez vurma}) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{5103}{16384}$

$P(\text{en az iki kez}) = (2\text{ kez}) + (3\text{ kez}) + (4\text{ kez}) + \dots + (7\text{ kez})$ ya da

$$P(\text{en az } 2) = 1 - \frac{5103}{16384} - \frac{2187}{16384} = \frac{4547}{8192}$$

Sadece 2 kez dersaydı cevap...

b)

$$q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

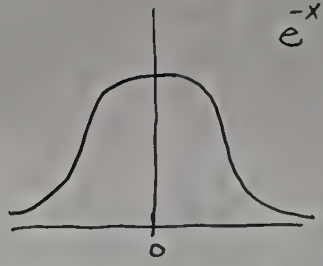
En az bir: $\left(1 - \frac{3}{4}\right)^n > \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3} > \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad$ $n=1$ için olmaz, $n=2$ " ", $n=3$ " " $\qquad n=4$ için $\frac{1}{3} > \frac{81}{256}$

n en az 4 atış yapması lazım

GAUSSIAN INTEGRAL!

e^{-x^2}



Onun integralini almak istersem ne yapacağım?

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx\,dy$$

$x^2+y^2=r^2$

$dx\,dy = r\,d\theta\,dr$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r\,dr$$

$+\alpha r^2 = u$

$\alpha\, 2r\,dr = du$

$r\,dr = \frac{du}{2\alpha}$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{2\alpha} = \frac{2\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

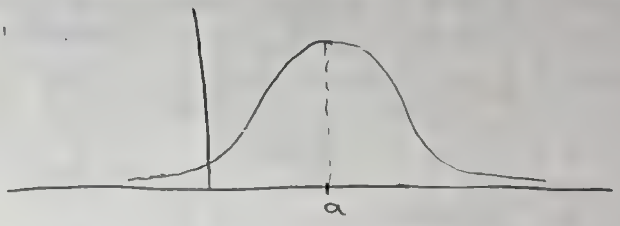
Bu en temel gaussian integraldi. Şimdi bunu daha karmaşık yapalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha (x-a)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$x-a=y$

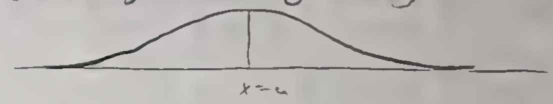
$dy = dx$

Bunun grafiği

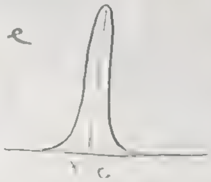


$x^2 = \frac{1}{\alpha}$'dan çıkarıyor $\frac{1}{e}$'ye düşer $\sqrt{a}$ ile bunun $\frac{1}{e}$'ye düştüğü değer arasında bir ilişki var. α fonksiyonun genişliğini veriyor.

α küçük ise gaussian geniş



α büyük ise



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + bx}\, dx$$ da önemlidir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} = \left(\frac{d}{db}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + bx}\, dx \Big|_{b=0}$$

$$-\alpha\left(x^2 + \frac{b}{\alpha}x + \frac{1}{4}\frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{\alpha^2}\right)$$

$$= -\alpha\left(x - \frac{b}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{b^2}{\alpha}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + bx}\, dx = e^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(x - \frac{b}{2\alpha}\right)^2} dx}_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{4}\frac{b^2}{\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{d}{db^n} e^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{\alpha}} \Big|_{b=0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} = 0$$ eğer n tek ise

Olasılık 0 ile 1 arasında olmalı oysa benim integralim $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Bunu [illegible] normalize etmem için $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$'ya bölmem gerekir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}$$

Böyle bir dağılım için $\bar{x}$ nedir?

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$ olur. $= 0$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha(x-a)^2}$$ olsaydım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$ ne olurdu. $\qquad x - a = u$, $x = u + a$

$$= \underbrace{\int u f(u)\, du}_{0} + a \underbrace{\int f(u)\, du}_{1} = a$$

Varyans nedir? $\langle (x-\bar{x})^2 \rangle$ idi. $= \sigma^2$

$$\int (x-a)^2 e^{-\alpha (x-a)^2} = \sigma^2 \qquad \bar{x} = a$$

$$x - a = y \qquad \int y^2 e^{-\alpha y^2} dy$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{d}{db}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} e^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{\alpha}} = \frac{d}{db} \frac{2}{4} \frac{b}{\alpha} e^{b^2/4\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha} e^{\frac{b^2}{4\alpha}} + \frac{b^2}{\alpha} e^{\frac{b^2}{4\alpha}} \Big|_{b=0} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\langle (x-a)^2 \rangle = \frac{1}{2\alpha}$$

α büyükse sapmalar az, α küçükse eğim yayvan sapmalar fazla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 e^{-\alpha (x-a)^2} dx = \frac{1}{2\alpha} = \sigma^2$$

$$\frac{1}{2\alpha} = \sigma^2 \qquad \alpha = \frac{1}{2\sigma^2} \text{ olur.}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$ bulunan değerler standart sapma cinsinden [illegible] σ büyükse geniş küçükse keskin bir eğri.

Görüldüğü gibi varyans gaussun dağılımın kendi özelliği haline geliyor.

Mean Deviation: (ortalama sapma)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |y| e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

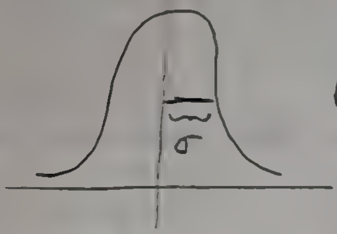
(x − a: [illegible])

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, 2 \cdot \int_0^\infty y\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\, 2\int_0^\infty e^{-y^2/2\sigma^2}\, y\, dy$$

$$\frac{y^2}{2\sigma^2} = u \qquad = \sigma^2 2\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-u}\, du}_{1}$$

$$\boxed{= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}}$$

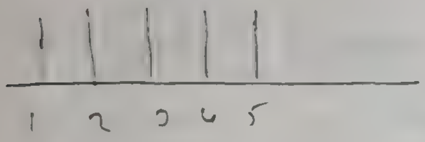
Şu an yaptığımız hata hesabı ile bağlı bir hesap yaparsan faktörler farkını buluruz.



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$\langle x - \bar{x} \rangle = \sigma$ ile $\langle |x - \bar{x}| \rangle$ arasında $\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$ ilişkisi vermez.

Binom dağılımı kesikli bir dağılımdır. Tam sayılar çıkarlar.



1. değerden 15
2. " 25
3. " 30 kere çıksın.

P_i: değerin ağırlığı

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}$$

Oysa Poisson ve Gaussian dağılımlarda dağılım sürekli idir.

$$\langle x \rangle = \frac{\int x\, P(x)\, dx}{\int P(x)\, dx}$$

Ortalama değer ne derece etkili olduğunu dağılımın genişliği yani standart sapma verir.

$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_1 (x - \bar{x})^2$ varyans, σ standart sapma, $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}^2$ hata

Bu her değer eşit olasılıkla gelirse geçerli. Eğer ağırlıkları farklı ise

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) P_i}{\sum P_i}$$

$$\frac{\int P(x)(x-\bar{x})^2\,dx}{\int P(x)\,dx}$$

2 tür hata verdi 1. si $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ (doğrusu $\frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}$), 2. olarak ta absolute value hata idi

$\langle |x-\bar{x}| \rangle$ (absolute value hata. Bu herhangi bir dağılım için yapılabilir.

(Hangi yöntemle hesap yaptığını rapora yaz)

Gauss dağılımının özel bir yeri var. İntegrasyon yöntemi ile integralini tam alıyoruz ve bir çok deney gaussian dağılım gösterir.

ÖRNEK! Bir ölçümün $\mp\sigma$ kadar aralıkta olma olasılığı nedir?

Ortalama değer m ise $m+\sigma$ / $m-\sigma$ olma olasılığı isteniyor

$$P_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx = 1$$

(çünkü bir bu normalizasyonu öyle buldukki bir'e normalize ettik)

Bunu $\frac{P(x)}{\int P(x)dx}$ ile normalize ediyorum

Bu 1 ise yok

değilse $\bar{x} = \int x \frac{P(x)}{\int P(x)dx}\,dx$

$$P_{(m\mp\sigma)} = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx$$

Bu integral alınabilir mi. Hayır. Değeri nümerik olarak tablolardan bulunabilir

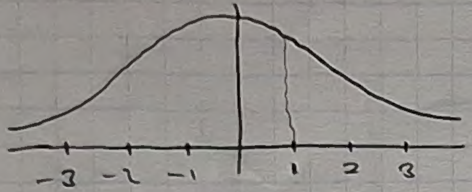
$$t = \frac{x-m}{\sigma} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-t^2/2}\,dt$$

Tablolardan $T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T e^{-t^2/2} dt$ verilmiş

Bizim fonksiyon çift fonksiyon olduğundan $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-t^2/2} dt$

$0 \rightarrow T$ arasında almak yeterli.

$P(1) = 0.683$
$P(2) = 0.954$
$P(3) = 0.997$



Nokta -3'de ise nokta 3 standart sapma uzakta diyebiliyoruz. (Yaptığımız normalizasyon sayesinde.)

ÖRNEK! Yer yüzeyinde 2 nokta arasındaki mesafe yaklaşık 1000 ft. 100 ft'lik bir şerit metre ile ölçüm yapılmak istense herhangi bir kişiden gelen bir hata olmadığı varsayılırsa şu tablo çıkıyor

Gözlem x	$\|d_i\|$ (hata) → ortalamadan sapma
1023.56	0.055
1023.47	0.035
1023.51	0.005
1023.49	0.015
1023.49	0.005
1023.48	0.025
1023.50	0.005
1023.53	0.025
1023.48	0.025
1023.52	0.015

Bu dağılımın normal (gaussian) dağılım olduğunu biliyorsak standart sapma (σ)'yı hesaplayınız.

$\bar{x} = 1023.50$ bulunur

$\sigma = \int (x-\bar{x})^2 P(x)\, dx$ ya da $\sigma = \int |x-\bar{x}| P(x)\, dx$ idi

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |x-m| \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-m)^2} dx$$

$$\alpha = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y e^{-h^2y^2} dy$$ (Bu Gaussian integrale benziyor)

$z = h^2y^2$ $\quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, h}$ $\quad \sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \alpha$

$\overline{|d_i|} = 0.021 = \alpha$

5: Alacağımız zarlar dağılım dağılımı yerine

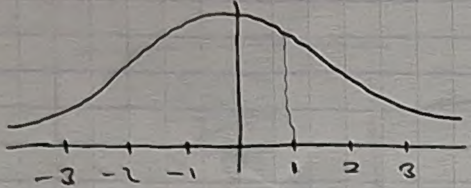
Öncelikle α yı bulmak istiyorum

Tablolardan $T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T e^{-t^2/2} dt$ verilmiş

Bizim fonksiyon çift fonksiyon olduğundan $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-t^2/2} dt$

0 → T arasında almak yeterli.

$P(1) = 0.683$
$P(2) = 0.954$
$P(3) = 0.997$



Nokta -3'de ise nokta 3 standart sapma uzakta diyebiliyoruz. (Yaptığımız normalizasyon sayesinde.)

ÖRNEK: Yer yüzeyinde 2 nokta arasındaki mesafe yaklaşık 1000 ft. 100 ft'lik bir çelik metre ile ölçüm yapılmak istense herhangi bir kişiden gelen bir hata olmadığı varsayılırsa şu tablo çıkıyor

Gözlem x	|di| (hata) → ortalamadan sapma
1023.56	0.055
1023.47	0.035
1023.51	0.005
1023.49	0.015
1023.49	0.005
1023.48	0.025
1023.50	0.005
1023.53	0.025
1023.48	0.025
1023.52	0.015

Bu dağılımın normal (gaussian) dağılım olduğunu biliyorsak standart sapma (σ)'yı hesaplayınız.

$\bar{x} = 1023.50$ bulunur

$\sigma = \int (x-\bar{x})^2 P(x)\, dx$ yada $\sigma = \int |x-\bar{x}| P(x)\, dx$ idi.

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |x-m| \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-m)^2} dx$$

$$\alpha = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y\, e^{-h^2y^2} dy$$ (Bu Gaussian integrale benziyor)

$z = h^2y^2$ $\quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, h}$ $\quad \sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \alpha$

$\overline{|d_i|} = 0.021 = \alpha$

PS: Alacağımız zarlar doğrusal değilken uygun öncelikle α yı bulmak istiyorum